Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

Из теоремы об изменении кинетического момента (24′) получим дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси Oz (рис. 53). Имеем

$$\mathrm{d}K_z/\mathrm{d}t=\Sigma M_z(\bar{F}_k^{(e)}).$$

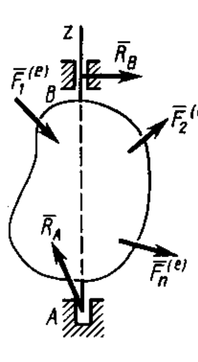

Рис. 53

Для случая вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, согласно (21), имеем

$$K_z=J_z\omega,$$

где J_z — постоянный для твердого тела момент инерции относительно неподвижной оси вращения; ω — угловая скорость. Учитывая это, получаем

$$J_z\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\Sigma M_z(\bar{F}_k^{(e)}).$$

Если ввести угол поворота тела φ, то, учитывая, что $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t=\ddot{\varphi}$, имеем

314

$$J_z\ddot{\varphi}=\Sigma M_z(\bar{F}_k^{(e)}).$$

Это и есть дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Оно полностью аналогично дифференциальному уравнению поступательного движения твердого тела в проекции на какую-либо ось, например на ось Ox.

В дифференциальное уравнение вращения тела вокруг неподвижной оси вместо координаты x входит угол поворота φ, вместо массы тела M — момент инерции относительно оси вращения J_z, вместо суммы проекций внешних сил на ось Ox — сумма моментов внешних сил относительно оси вращения Oz или так называемый вращательный момент внешних сил.

Реакции подшипников $\bar{R}_A$ и $\bar{R}_B$ оси вращения являются внешними силами, но их моменты относительно оси вращения равны нулю, так как они пересекают ось, если пренебречь силами трения.

В частном случае, когда

$$\Sigma M_z(\bar{F}_k^{(e)})=L_z^{(e)}=\text{const},\ \text{то}\ \varepsilon=\ddot{\varphi}=L_z^{(e)}/J_z=\text{const},$$

т. е. вращение тела происходит с постоянным угловым ускорением.

Если

$$\Sigma M_z(\bar{F}_k^{(e)})=L_z^{(e)}=0,$$

то

$$\ddot{\varphi}=\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t=0\ \text{и}\ \omega=\text{const}.$$

Это случай равномерного вращения тела по инерции без действия вращательного момента внешних сил.

Дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела в общем случае позволяет решать две основные задачи: по заданному вращению тела определять вращающий момент внешних сил и по заданному вращательному моменту и начальным условиям находить вращение тела. При решении второй задачи для нахождения угла поворота как функции времени приходится интегрировать дифференциальное уравнение вращательного движения. Методы его интегрирования полностью аналогичны рассмотренным выше методам интегрирования дифференциального уравнения прямолинейного движения точки.

Движение точки под действием центральной силы. Теорема площадей

Секторная скорость. Теорема площадей. Наряду с введенными в кинематике точки скоростью $\bar{v}$ и ускорением $\bar{a}$ можно ввести другие характеристики движения точки, например секторные скорость и ускорение. Секторной скоростью точки $\bar{v}_\sigma$ или $\mathrm{d}\bar{\sigma}/\mathrm{d}t$ относительно точки O (рис. 54) называют векторную величину, определяемую по формуле

315

$$\bar{v}_\sigma=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{\sigma}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\bar{\sigma}}{\mathrm{d}t},\qquad(28)$$

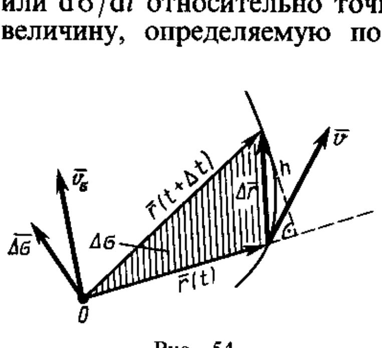

Рис. 54

где $\Delta\bar{\sigma}$ — вектор, численно равный заштрихованной на рисунке площади, ометаемой радиусом-вектором $\bar{r}$ движущейся точки за время Δt; направление вектора $\Delta\bar{\sigma}$ берется по перпендикуляру к заштрихованной площади так, чтобы с конца этого вектора при ометании заштрихованной площади видеть поворот радиуса-вектора $\bar{r}$ против часовой стрелки.

Для случая движения точки по плоскости секторная скорость перпендикулярна этой плоскости, если точка O выбрана в той же плоскости, в которой движется точка. Секторная скорость всегда приложена в той точке, относительно которой она вычисляется.

Секторное ускорение $\bar{a}_\sigma$ можно ввести как производную по времени от вектора секторной скорости, т. е.

$$\bar{a}_\sigma=\mathrm{d}^2\bar{\sigma}/\mathrm{d}t^2=\mathrm{d}\bar{v}_\sigma/\mathrm{d}t.$$

Секторную скорость можно выразить через момент линейной скорости $\bar{v}$ относительно точки O:

$$\bar{v}_\sigma={}^1/_2(\bar{r}\times\bar{v}).\qquad(29)$$

Векторное произведение $\bar{r}\times\bar{v}$, согласно определению, имеет такое же направление, как и $\bar{v}_\sigma$. Следовательно, для доказательства формулы (29) достаточно показать, что величины левой и правой частей одинаковы. Вычислим левую часть формулы (29):

$$|\bar{v}_\sigma|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\bar{\sigma}|}{\Delta t},$$

но

$$|\Delta\bar{\sigma}|={}^1/_2\,rh={}^1/_2 r|\Delta\bar{r}|\sin(\bar{r},\widehat{\ }\Delta\bar{r}).$$

Следовательно,

$$|\bar{v}_\sigma|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\bar{\sigma}|}{\Delta t}={}^1/_2\,r\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{|\Delta\bar{r}|}{\Delta t}\sin(\bar{r},\widehat{\ }\Delta\bar{r})\right]={}^1/_2\,rv\sin(\bar{r},\widehat{\ }\bar{v}),$$

что совпадает с модулем векторного произведения, стоящим справа в формуле (29).

Если движение точки происходит в плоскости, то секторную скорость можно считать алгебраической величиной. В этом случае секторную скорость точки часто выражают в полярных координатах. Из формулы (29) секторная скорость

$$v_\sigma=\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t={}^1/_2\,rv\sin(\bar{r},\widehat{\ }\bar{v}).$$

316

Но из кинематики точки в полярной системе координат на плоскости известно (рис. 55), что $v\sin(\bar{r},\widehat{\ }\bar{v})=v_P=r\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$.

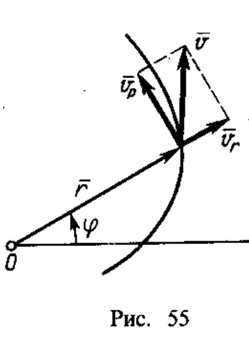

Рис. 55

Следовательно,

$$v_\sigma=\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}={}^1/_2\,r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.\qquad(30)$$

Формула (30) выражает секторную скорость в полярных координатах в случае плоского движения точки.

Используя формулу (29), кинетический момент через секторную скорость можно выразить в виде

$$\bar{k}_O=\bar{r}\times m\bar{v}=2m\bar{v}_\sigma.\qquad(31)$$

Соответственно теорему об изменении кинетического момента (23) для точки можно выразить через секторную скорость формулой

$$2m\frac{\mathrm{d}\bar{v}_\sigma}{\mathrm{d}t}=\bar{M}_O(\bar{F}).\qquad(32)$$

В форме (32) теорему об изменении кинетического момента для точки называют *теоремой площадей*.

Движение точки под действием центральной силы. *Центральной силой* $\bar{F}$ называют такую силу, линия действия которой при движении точки ее приложения проходит через одну и ту же точку O, называемую центром центральной силы.

Центральная сила может быть притягивающей (направленной к центру) и отталкивающей (направленной от центра). Так как для центральной силы момент силы относительно своего центра равен нулю, т. е. $\bar{M}_O(\bar{F})=0$, то, следовательно, по теореме об изменении кинетического момента для точки (23),

$$\bar{k}_O=\overrightarrow{\text{const}}.\qquad(33)$$

В проекциях на прямоугольные оси декартовой системы с началом в точке O по (33) имеем:

$$k_x=m(y\dot{z}-z\dot{y})=C_1;\ \ k_y=m(z\dot{x}-x\dot{z})=C_2;\ \ k_z=m(x\dot{y}-y\dot{x})=C_3,\qquad(33')$$

где C_1, C_2, C_3 — постоянные величины.

Умножая первое соотношение (33′) на x, второе — на y, третье — на z и складывая, получаем $O=C_1x+C_2y+C_3z$, т.е. координаты движущейся точки x, y, z удовлетворяют уравнению плоскости, проходящей через начало координат.

Следовательно, траектория точки, движущейся под действием центральной силы, является плоской кривой, лежащей в плоскости, проходящей через центр силы.

Так как при движении точки под действием центральной силы

317

$$\bar{k}_0=\overrightarrow{\text{const}},$$

то, учитывая формулу (31), имеем

$$\bar{v}_\sigma=\mathrm{d}\bar{\sigma}/\mathrm{d}t=\overrightarrow{\text{const}}$$

и, следовательно,

$$v_\sigma=\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t=\text{const}=C,\qquad(34)$$

или

$$\sigma=\sigma_0+Ct.$$

Формула (34) выражает так называемый *интеграл площадей*: *при движении точки под действием центральной силы секторная скорость является постоянной величиной и, следовательно, ометаемая радиусом-вектором площадь пропорциональна времени.*

Учитывая формулу (30), интеграл площадей (34) в полярных координатах можно представить в виде

$$r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\text{const}.\qquad(35)$$

В этой форме интеграл площадей широко используется при рассмотрении движения планет вокруг Солнца и вообще различных спутников, в частности искусственных спутников Земли.

Теорема об изменении кинетического момента системы в относительном движении по отношению к центру масс

Рассмотрим относительное движение системы только относительно системы координат, движущейся поступательно вместе с центром масс системы.

Прежде чем рассмотреть теорему, выведем формулу для вычисления кинетического момента системы.

Формула для кинетического момента системы. Пусть механическая система совершает движение относительно основной системы координат $Ox_1y_1z_1$. Возьмем подвижную систему координат $Cxyz$ с началом в центре масс системы C, движущуюся поступательно относительно основной системы координат. Из рис. 56 следует, что для любого момента времени $\bar{\rho}_k=\bar{\rho}_C+\bar{r}_k$.

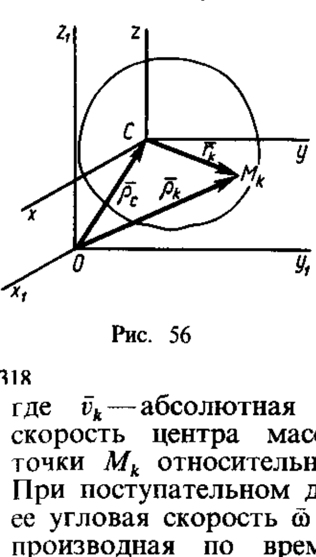

Рис. 56

Дифференцируя это тождество по времени, получаем

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\rho}_k}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\bar{\rho}_C}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\bar{r}_k}{\mathrm{d}t}$$

или

$$\bar{v}_k=\bar{v}_C+\bar{v}_{kr},$$

318

где $\bar{v}_k$ — абсолютная скорость точки M_k; $\bar{v}_C$ — абсолютная скорость центра масс; $\bar{v}_{kr}=\mathrm{d}\bar{r}_k/\mathrm{d}t$ — относительная скорость точки M_k относительно подвижной системы координат $Cxyz$. При поступательном движении подвижной системы координат ее угловая скорость $\bar{\omega}$ равна нулю и по формуле Бура полная производная по времени от радиуса-вектора $\bar{r}$ совпадает с локальной производной, равной относительной скорости.

Согласно определению кинетического момента $\bar{K}_O$ относительно неподвижной точки O, для абсолютного движения системы относительно системы координат $Ox_1y_1z_1$ по формуле (20) имеем

$$\bar{K}_O=\Sigma\,\bar{\rho}_k\times m_k\bar{v}_k.$$

Подставляя в эту формулу значения $\bar{\rho}_k$ и $\bar{v}_k$, после небольших преобразований получаем

$$\bar{K}_O=\bar{\rho}_C\times\bar{v}_C\Sigma m_k+\Sigma\,\bar{r}_k\times m_k\bar{v}_{kr}+\bar{\rho}_C\times\Sigma m_k\frac{\mathrm{d}\bar{r}_k}{\mathrm{d}t}+(\Sigma m_k\bar{r}_k)\times\bar{v}_C.\qquad(36)$$

В этой формуле $\Sigma m_k=M$ — масса системы. Кроме того, последние два слагаемых равны нулю. Действительно, по определению радиуса-вектора центра масс относительно этого центра масс имеем

$$O=\bar{r}_C=\Sigma m_k\bar{r}_k/M.$$

Следовательно, $\Sigma m_k\bar{r}_k=0$ и последнее слагаемое в (36) тоже равно нулю.

Другое слагаемое можно предварительно преобразовать:

$$\bar{\rho}_C\times\Sigma m_k\frac{\mathrm{d}\bar{r}_k}{\mathrm{d}t}=\bar{\rho}_C\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Sigma m_k\bar{r}_k).$$

Это слагаемое также равно нулю, так как все время $\Sigma m_k\bar{r}_k=0$. Формула (36) принимает следующий окончательный вид:

$$\bar{K}_O=\bar{\rho}_C\times M\bar{v}_C+\bar{K}_C^{(r)},\qquad(37)$$

где $\bar{K}_C^{(r)}=\Sigma\bar{r}_k\times m_k\bar{v}_{kr}$.

Величина $\bar{K}_C^{(r)}$ является кинетическим моментом системы относительно центра масс для относительного движения относительно системы координат, движущейся поступательно вместе с центром масс, т. е. системы координат $Cxyz$.

Формула (37) показывает, что *кинетический момент абсолютного движения системы относительно неподвижной точки O равен векторной сумме кинетического момента центра масс относительно той же точки, если бы в центре масс была сосредоточена вся масса системы, и кинетического момента системы относительно центра масс для относительного движения системы по отношению к подвижной системе координат, движущейся поступательно вместе с центром масс.*

Теорема об изменении кинетического момента системы в относительном движении по отношению к центру масс. Для

319

абсолютного движения системы и неподвижной точки O теорема об изменении кинетического момента имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}\bar{K}_O}{\mathrm{d}t}=\Sigma\,\bar{\rho}_k\times\bar{F}_k^{(e)}.$$

Подставляя сюда значения $\bar{\rho}_k$ и $\bar{K}_O$ по формуле (37) и производя дифференцирование и группировку членов, получаем

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\rho}_C}{\mathrm{d}t}\times M\bar{v}_C+\bar{\rho}_C\times M\frac{\mathrm{d}\bar{v}_C}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\bar{K}_C^{(r)}}{\mathrm{d}t}=\bar{\rho}_C\times\Sigma\bar{F}_k^{(e)}+\Sigma\,\bar{r}_k\times\bar{F}_k^{(e)}.$$

Перенося из правой части в левую первое слагаемое и учитывая, что

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\rho}_C}{\mathrm{d}t}\times M\bar{v}_C=\bar{v}_C\times M\bar{v}_C=0$$

как векторное произведение параллельных векторов, после объединения слагаемых имеем

$$\bar{\rho}_C\times\left[M\frac{\mathrm{d}\bar{v}_C}{\mathrm{d}t}-\Sigma\bar{F}_k^{(e)}\right]+\frac{\mathrm{d}\bar{K}_C^{(r)}}{\mathrm{d}t}=\Sigma\,\bar{r}_k\times\bar{F}_k^{(e)}.$$

В этой формуле выражение в квадратных скобках равно нулю на основании теоремы о движении центра масс системы (18) и, следовательно, формула примет вид

$$\frac{\mathrm{d}\bar{K}_C^{(r)}}{\mathrm{d}t}=\Sigma\bar{r}_k\times\bar{F}_k^{(e)}$$

или

$$\mathrm{d}\bar{K}_C^{(r)}/\mathrm{d}t=\bar{L}_C^{(e)},\qquad(38)$$

где $\bar{L}_C^{(e)}=\Sigma\bar{r}_k\times\bar{F}_k^{(e)}$ является главным моментом всех внешних сил относительно центра масс.

Формула (38) и выражает рассматриваемую теорему *об изменении кинетического момента системы относительно центра масс для относительного движения системы по отношению к системе координат, движущейся поступательно с центром масс; она формулируется так же, как если бы центр масс был неподвижной точкой.*

Эту теорему применяют для изучения вращательной части плоского движения и движения свободного твердого тела вокруг центра масс.

Дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела

Используя теоремы о движении центра масс и изменении кинетического момента системы относительно центра масс для относительного движения системы по отношению к системе

320

координат, движущейся поступательно с центром масс, получим дифференциальные уравнения плоского движения твердого тела.

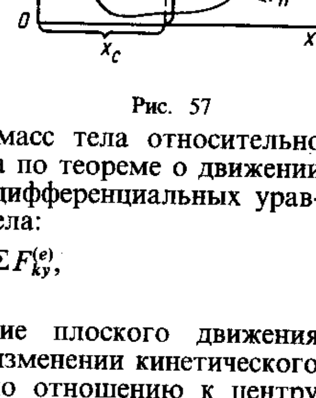

Рис. 57

В плоскости движения центра масс тела, совершающего плоское движение, выберем неподвижную систему координат Ox_1y_1, относительно которой рассматривается движение, и движущуюся поступательно вместе с центром масс систему Cxy (рис. 57). Пусть x_C и y_C — координаты центра масс тела относительно неподвижной системы координат. Тогда по теореме о движении центра масс получим два следующих дифференциальных уравнения плоского движения твердого тела:

$$M\ddot{x}_C=\Sigma\,F_{kx}^{(e)};\ \ M\ddot{y}_C=\Sigma F_{ky}^{(e)},$$

где M — масса тела.

Третье дифференциальное уравнение плоского движения твердого тела получим из теоремы об изменении кинетического момента в относительном движении по отношению к центру масс (38) в проекции на подвижную ось Cz:

$$\mathrm{d}K_{Cz}^{(r)}/\mathrm{d}t=\Sigma M_{Cz}(\bar{F}_k^{(e)}).$$

Плоское движение твердого тела можно считать состоящим из поступательного движения вместе с центром масс C и вращения вокруг подвижной оси Cz. Для случая вращения вокруг оси кинетический момент относительно этой оси вычисляется по формуле

$$K_{Cz}^{(r)}=J_{Cz}\omega,$$

где ω — угловая скорость; J_{Cz} — момент инерции тела относительно оси Cz.

Так как J_{Cz} является величиной постоянной, то после подстановки $K_{Cz}^{(r)}$ в теорему об изменении кинетического момента в относительном движении получим

$$J_{Cz}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\Sigma M_{Cz}(\bar{F}_k^{(e)}).$$

Если ввести угол поворота φ вокруг подвижной оси Cz, то получим следующее дифференциальное уравнение:

$$J_{Cz}\ddot{\varphi}=\Sigma M_{Cz}(\bar{F}_k^{(e)}).$$

Таким образом, для твердого тела, совершающего плоское движение и, следовательно, имеющего три степени свободы, соответственно получим следующие три дифференциальных уравнения:

$$M\ddot{x}_C=\Sigma F_{kx}^{(e)};\ \ M\ddot{y}_C=\Sigma\,F_{ky}^{(e)};\ \ J_{Cz}\ddot{\varphi}=\Sigma M_{Cz}(\bar{F}_k^{(e)}).\qquad(39)$$

321

С помощью этих уравнений можно решать две основные задачи: по заданному плоскому движению твердого тела находить действующие на тело внешние силы и по заданным внешним силам и начальным условиям определять его движение. При решении этих задач должны быть заданы масса тела M и его момент инерции.

Теорема Резаля

Теореме об изменении кинетического момента системы можно дать следующее кинематическое истолкование. Из кинематики точки известно, что скорость точки можно рассматривать как скорость конца радиуса-вектора, следящего за движущейся точкой, или как скорость изменения самого радиуса-вектора, если он проведен в движущуюся точку из какой-либо неподвижной точки (рис. 58). Траектория движущейся точки при этом является годографом радиуса-вектора $\bar{r}$, а скорость точки направлена по касательной к этому годографу и равна первой производной по времени от радиуса-вектора. Аналогично этому, и производную по времени от кинетического момента можно рассматривать как своеобразную скорость конца этого вектора при движении по годографу кинетического момента (рис. 59). Эта скорость не является обычной скоростью точки, так как кинетический момент имеет иную размерность, чем радиус-вектор. Это есть скорость изменения вектора кинетического момента.

Таким образом, если обозначить через $\bar{u}$ скорость конца кинетического момента, т. е. $\bar{u}=\mathrm{d}\bar{K}_O/\mathrm{d}t$, то теорему об изменении кинетического момента системы (24) можно представить в новой форме — в виде так называемой теоремы Резаля:

$$\bar{u}=\bar{L}_O^{(e)}.$$

Теорему Резаля можно сформулировать так: *при движении механический системы скорость точки, совпадающей с концом вектора кинетического момента при движении по годографу этого вектора, равна по величине и параллельна по направлению главному моменту всех внешних сил системы.* Точка, относительно которой вычисляются кинетический момент системы и главный момент внешних сил, одна и та же.

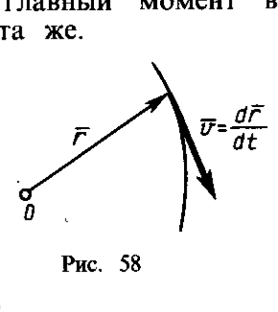

Рис. 58

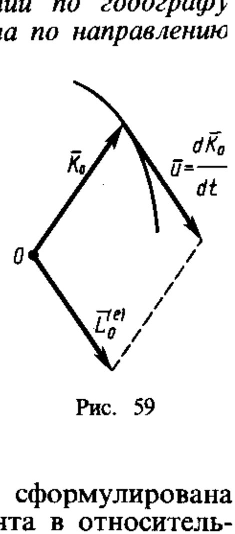

Рис. 59

322

В форме теоремы Резаля может быть сформулирована и теорема об изменении кинетического момента в относительном движении по отношению к центру масс.

Теорема Резаля особенно удобна для приближенного исследования движения быстровращающихся гироскопов.

Аналогично и теорему об изменении количества движения для системы можно сформулировать в форме теоремы Резаля для количества движения: *при движении механической системы скорость точки, совпадающей с концом вектора количества движения при движении по его годографу, равна по величине и параллельна по направлению главному вектору всех внешних сил, действующих на систему.*